対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数 (超函数と線型微分方程式 IV)

数理解析研究所講究録
248巻 1975年 312-318

対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数

日本女子大　峰村 勝弘

1970年の Nice Congress で，S. Helgason は 単位円内部 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ 上の Poincaré metric

$$ds^2=(1-x^2-y^2)^{-2}(dx^2+dy^2),\quad z=x+iy$$

に対応する laplacian

$$\Delta=(1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

の任意の固有函数は，Poisson kernel

$$P(z,e^{i\theta})=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}$$

のある複素巾 $P(z,e^{i\theta})^\lambda$ による，境界 $S=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ の上のある超函数 φ の Poisson integral

$$\int_S P(z,e^{i\theta})^\lambda\varphi(e^{i\theta})\,d\theta$$

として得られることを示し，一般の対称空間への拡張を示唆

した。(Helgason's conjecture, [1]) 以後群論的な方法でHelgason's conjectureの証明が試みられたが、対称空間のrankが1の場合できる一般Lorentz群を除いて満足すべき結果が得られず、higher rankの場合は絶望的であった。

ところで、Helgason's conjectureを証明するためには、各固有函数に対して、Poisson integralのleft inverseとなる様な境界値がとれればよい。([4]参照) それは確定特異点型偏微分方程式と境界値問題の理論[2]によって可能であることがわかった。従ってHelgason's conjectureは一般の対称空間に対して(genericな固有値に対して)成立する。以下その概略を述べるが、詳細は[6]を参照されたい。又、$G=SL(3,\mathbb{R})$の場合は既にわかっており(大島[5])、議論は$SL(3,\mathbb{R})$の場合に平行である。

さて、Gを中心有限な、連結実半単純リー群、KをGの一つの極大コンパクト部分群、$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$をそれぞれG, Kのリー環、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$を一つのカルタン分解とする。$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{p}$における一つの極大可換部分空間とし、$\mathfrak{a}$の双対空間$\mathfrak{a}^*$に順序を一つ固定して、この順序に関する正のルート全体をR_+、R_+に対応する岩沢分解を$G=KAN$とする。Gの元gのこの岩沢分解による分解を$g=\kappa(g)\exp H(g)\, n(g)$ $(H(g)\in\mathfrak{a})$とする。M, $\tilde{M}$をそれぞれKにおけるAの

中心化群，正規化群とする。$W=\hat{M}/M$ とおく。W は weyl group と呼ばれる。$\mathbb{D}(G/K)$ で G/K 上の G-不変な微分作用素のなす環を表わす。$\mathbb{D}(G/K)$ は $l=\mathrm{rank}(G/K)$ 変数の多項式環に同型である。$\mathbb{D}(G/K)$ の指標，すなわち $\mathbb{D}(G/K)$ から $\mathbb{C}$ への環準同型 χ に対して $\mathcal{M}(\chi)$ により G/K 上の微分方程式系

$$\Delta u=\chi(\Delta)u \quad , \quad \Delta\in\mathbb{D}(G/K)$$

を表わし，$\mathcal{M}(\chi)$ の同時固有函数のなす空間を $\mathcal{A}(G/K,\mathcal{M}(\chi))$ で表わす。$\mathbb{D}(G/K)$ に楕円型作用素があるので $\mathcal{M}(\chi)$ の解は実解析的になる。$\mathcal{B}(K/M)$ により K/M 上の超函数全体のなす空間を表わし，$\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$ ($\mathfrak{a}$ の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ の複素化を $\mathfrak{a}_c^*$ と書く) に対して $\mathcal{B}(K/M)$ 上の G の作用を

$$(\pi_\lambda(g)\varphi)(kM)=e^{\lambda(H(g^{-1}k))}\varphi(\kappa(g^{-1}k)M) \qquad (g\in G)$$

で定義すると，$\mathcal{B}(K/M)$ は G-可群となる。次に，$\varphi\in\mathcal{B}(K/M)$ に対して φ の Poisson integral $\mathcal{P}_\lambda(\varphi)$ を

$$(\mathcal{P}_\lambda\varphi)(gK)=\int_K e^{-(\lambda+2\rho)(H(g^{-1}k))}\varphi(kM)\,dk$$

で定める。ここに dk は K 上の total mass 1 の Haar meas. で，ρ は正のルートの和の半分を表わす。この時容易に $\mathcal{P}_\lambda$ が G-可群 $\mathcal{B}(K/M)$ から (left translation による)

G-可群 $\mathcal{A}(G/K, \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の中への G-準同型になることがわかる。ここに χ_λ は $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ に対して自然に定まる $\mathbb{D}(G/K)$ の指標である。従って Helgason's conjecture は、任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ に対して $\mathcal{P}_\lambda$ は onto か という問題に言い直すことが出来る。以下 $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ を一つ固定して考える。

対称空間 G/K の元則え全体は、G/K の稠密な開部分多様体をなし、自然な対応で、$\Omega_+ = K/M \times (0,1)^l$ ($l = \mathrm{rank}(G/K)$) と同型になる。$\Omega = K/M \times (-1,1)^l$ とおき、$\Omega_+ \subset \Omega$ と考える。$\mathbb{D}(G/K)$ の元 Δ は制限により Ω_+ の微分作用素となるが、Δ が G-不変であることから Δ が実解析的に Ω 上の微分作用素に拡張出来ることが示されるので、それをやはり Δ で表わす。

さて、Ω の超平面 N_i ($i=1,\cdots,l$) を

$$N_i = \{(x,y) \in K/M \times (-1,1)^l \mid y = (y_1, \cdots, y_l),\ y_i = 0\}$$

で定める。このとき各 N_i に対して、N_i に関して弱いいみで確定特異点型の微分作用素 P_i で、任意の $u \in \mathcal{A}(G/K, \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ に対して $P_i u = 0$ を満たすものが存在する。([6]参照) 従って [2] により、Ω 上の超函数 $\tilde{u}$ で、

$$\Delta \tilde{u} = \chi_\lambda(\Delta)\tilde{u}, \quad \Delta \in \mathbb{D}(G/K),$$

$$\tilde{u}|\Omega_+ = u$$
$$\mathrm{supp}\, \tilde{u} \subset \overline{\Omega_+}$$

なるものが唯一つ存在することがわかる。更に $\Delta \in D(G/K)$ は edge $K/M \times \{0\} \subset \Omega$ に関して確定特異点型であるからやはり [2] によって，λ が次の仮定

(A) 任意のルート α に対して $\dfrac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ は整数とならない。

を満足しているとき，$\sqrt{-1}S^*\Omega$ の subset

$$V = \{(x, y, \sqrt{-1}(\xi,\eta)) \in \sqrt{-1}S^*\Omega \mid y=0, \xi=0, \eta_i \neq 0 \ (i=1,\cdots,\ell)\}$$

のある近傍で定義された 0 階の micro-differential operator A_w $(w \in W)$ が存在し，$\tilde{u}(x,y)$ は K/M 上の超函数 φ_w $(w \in W)$ により

$$(*) \quad sp\, \tilde{u} = \sum_{w \in W} A_w (\varphi_w\, y^{\lambda(w)})$$

と表わされる。ここで，α_i $(i=1,\cdots,\ell)$ は単純ルートを表わし $w \in W$ に対して $\lambda^w = w(\lambda+\rho) - \rho$ とおく。$-\lambda^w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \alpha_i$ により λ_i $(i=1,\cdots,\ell) \in \mathbb{C}$ を定め，$y^{\lambda(w)} = y_1^{\lambda_1} \cdots y_\ell^{\lambda_\ell}$ とおく。さて，(*) において，A_w の symbol $\sigma_0(A_w)$ が V 上恒等的に 1 という条件の下に A_w と φ_w $(w \in W)$ が一意的に存在

する。そこで $u \in \mathcal{A}(G/K, \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ に対して (*) で定まる超函数 φ_1 を対応させる写像を β_λ と定めると，β_λ は次の性質を持つことが証明出来る。

1) β_λ は $\mathcal{A}(G/K, \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ から $\mathcal{B}(K/M)$ への G-準同型：

2) $\beta_\lambda \circ \mathcal{P}_\lambda = c_\lambda \circ id$

c_λ は Harish-Chandra の c-function により，$c_\lambda = c(-\sqrt{-1}(\lambda+\rho))$ と表わされる。

1), 2) と，K-両側不変な球函数の積分表示の理論とを合わせて，次の定理を得る。

<u>定理</u> 仮定 (A) の下で，Poisson integral

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K, \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

は上への G-同型を与える。

References

[1] Helgason, S., Group Representations and Symmetric Spaces, Actes, Congrés intern. Math., 1970. Tome 2, p. 313 à 319.

[2] Kashiwara, M. and T. Oshima, Systems of differential equations with regular singularity and their boundary value problem, preprint.

[3] 峰村–田中–岡本, ランク 1 の対称空間上のディリクレ問題, 数理研講究録「対称空間上の不変微分方程式」に掲載予定.

[4] 岡本–峰村, 対称空間上の境界値問題について, 数理研講究録 227 (1975), 70–74.

[5] 大島利雄, 対称空間における境界値問題について, 数理研講究録「対称空間上の不変微分方程式」に掲載予定.

[6] Kashiwara, M., A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, Eigenfunctions of Invariant Differential Operators on a Symmetric Space, preprint.